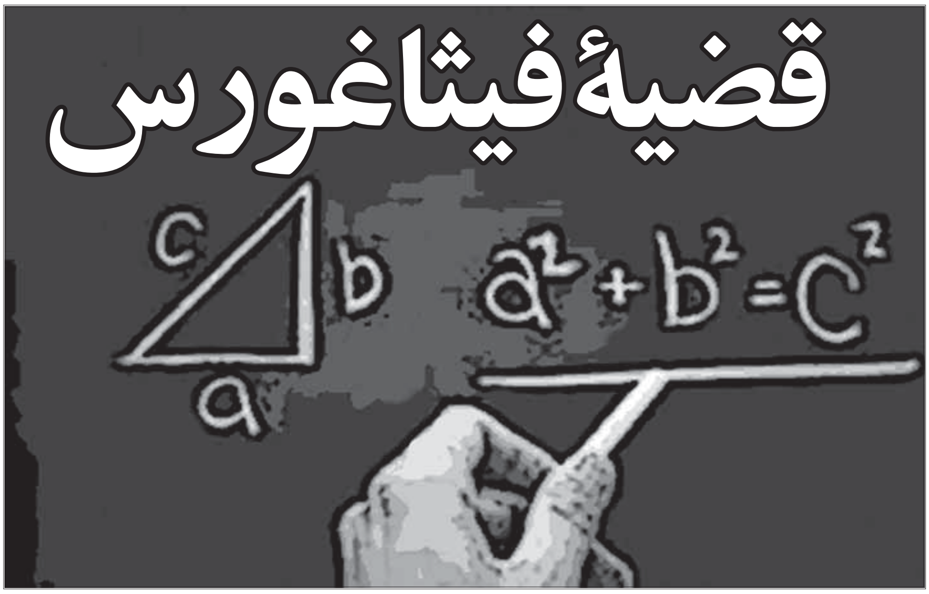
اثباتی برای قضیهٔ فیثاغورس



محمد طبیعی
دانش‌آموز رشتهٔ ریاضی دبیرستان
علامه طباطبایی تهران

کلیدواژه‌ها: قضیهٔ فیثاغورس

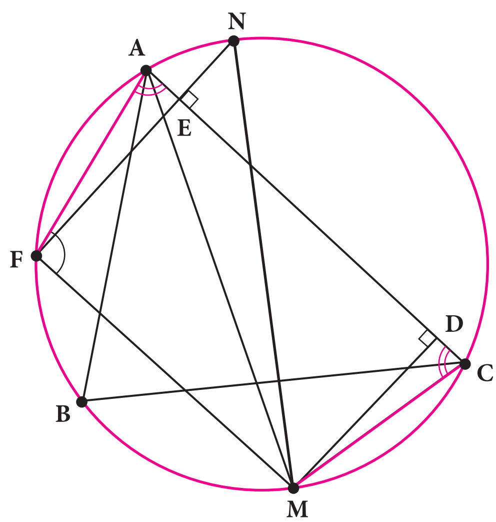
مقدمه

«قضیهٔ فیثاغورس» معروف‌ترین و یکی از مهم‌ترین قضایای هندسی است که تاکنون بیش از ۳۷۰ اثبات برای آن ارائه شده است. در این مقاله قصد داریم اثبات جدیدی به‌وسیلهٔ یک لم کاربردی برای این قضیه مطرح کنیم.

لم

در شکل ۱، در مثلث ABC $AC>AB$ و M و N به‌ترتیب وسط کمان‌های BC و BAC هستند. از M و N بر AC عمود می‌کنیم تا آن را به‌ترتیب در D و E قطع کنند. آن‌گاه خواهیم داشت:

$$CD=AE=\frac{b-c}{۲}$$



شکل ۱

اثبات لم

NE را امتداد می‌دهیم تا بار دیگر دایره را در F قطع کند.
از آنجا که N وسط کمان $\widehat{BAC}$ است، پس: $\widehat{AN}=\hat{B}-\hat{C}$ (چرا؟). در نتیجه: $A\hat{F}E=\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲}$ و: $F\hat{A}E=۹۰-(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲})$.
از طرف دیگر می‌دانیم که M وسط کمان BC است، پس: $\widehat{BM}=\hat{A}$. در نتیجه: $M\hat{C}D=\frac{\hat{A}}{۲}+\hat{C}$ (چرا؟). همچنین می‌دانیم: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$، پس: $\frac{\hat{A}}{۲}+\hat{C}=۹۰-(\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲})$ در نتیجه $F\hat{A}E=M\hat{C}D$.

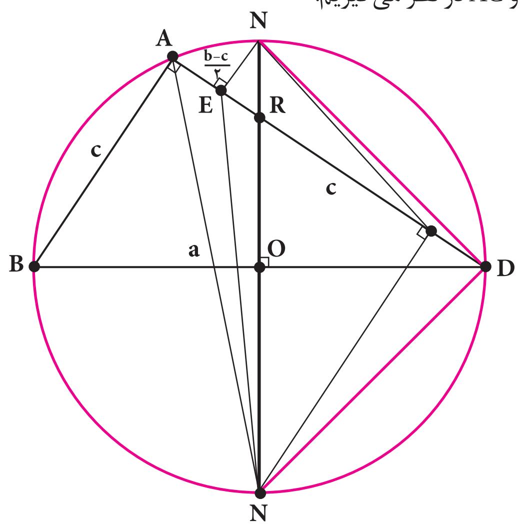
یعنی چهارضلعی AFMC ذوزنقه است (چرا؟) و از آنجا که محاطی است، پس: AF=MC و در نتیجه: $\boxed{AE=CD}$

حال با توجه به آنکه: $M\hat{A}C=\frac{\hat{A}}{۲}$، پس: $F\hat{A}M=F\hat{A}E-M\hat{A}C=\hat{C}$. بنابراین: FM=AB و با توجه به

اینکه AFMC ذوزنقه است، پس: ED=FM=AB. و از آنجا که: AE+CD+ED=۲AE+ED=AC، پس: $AE=\frac{b-c}{۲}$ و لم اثبات می‌شود.

اثبات قضیهٔ فیثاغورس

مثلث قائم‌الزاویه ABC (AC>AB) مفروض است. M و N به‌ترتیب وسط کمان‌های $\widehat{BC}$ و $\widehat{BAC}$، و D و E به‌ترتیب پای عمودهای وارد از M و N بر AC هستند. O را نیز مرکز دایرهٔ محیطی و R را محل برخورد MN و AC در نظر می‌گیریم.



شکل ۲

از آنجا که چهارضلعی ENDM ذوزنقه است، پس:

مساحت $\overset{\Delta}{NRD}$ = مساحت $\overset{\Delta}{ERM}$ (۱).

حال مساحت مثلث $\overset{\Delta}{NCM}$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که:

مساحت $\overset{\Delta}{CRM}$ + مساحت $\overset{\Delta}{NRD}$ + مساحت $\overset{\Delta}{NCD}$ = مساحت $\overset{\Delta}{NCM}$

با توجه به تساوی (۱) می‌توان نوشت:

مساحت $\overset{\Delta}{NDC}$ + مساحت $\overset{\Delta}{CME}$ = مساحت $\overset{\Delta}{NCM}$ (۲)

حال اگر داشته باشیم: AB=c، AC=b و BC=a، آن‌گاه خواهیم داشت:

مساحت $\overset{\Delta}{NCM} = \frac{CO\times MN}{۲} = \frac{\frac{a}{۲}\times a}{۲} = \frac{a^۲}{۴}$

می‌دانیم: $N\hat{A}C = A\hat{N}E = ۴۵^\circ$، پس: $\underbrace{NE = AE = \frac{b-c}{۲}}_{\text{طبق لم گفته شده}}$ و همچنین: $D\hat{A}M = A\hat{M}D = ۴۵^\circ$.

بنابراین: $\underbrace{AD = DM = \frac{b+c}{۲}}_{\text{طبق نتیجهٔ لم گفته شده}}$. یعنی می‌توان گفت:

مساحت $\overset{\Delta}{CME}$ + مساحت $\overset{\Delta}{NDC}$ $= \frac{NE\times DC}{۲} + \frac{MD\times CE}{۲}$

$$= \frac{\frac{b-c}{۲}\times\frac{b-c}{۲}}{۲} + \frac{\frac{b+c}{۲}\times\frac{b+c}{۲}}{۲} = \frac{b^۲+c^۲}{۴}$$

حال طبق تساوی (۲) می‌توان نوشت: $\frac{b^۲+c^۲}{۴} = \frac{a^۲}{۴}$، پس: $b^۲+c^۲=a^۲$.

پی‌نویس

در اثبات ارائه شده، مثلث قائم‌الزاویهٔ ما نمی‌تواند متساوی‌الساقین باشد، لذا باید در مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین نیز اثباتی برای قضیهٔ فیثاغورس ارائه شود.

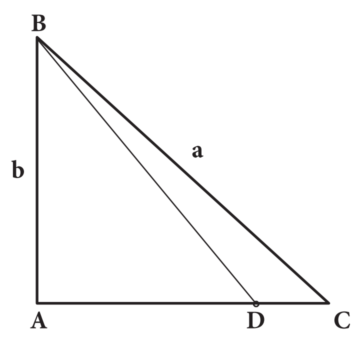
برای اثبات قضیهٔ فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین، از برهان خلف استفاده می‌کنیم.

فرض کنید: AB=AC=b و BC=a. همچنین، فرض کنید: $a \neq b\sqrt{۲}$.

پس می‌توان فرض کرد که: $a > b\sqrt{۲}$

نقطهٔ D را روی AC به‌گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که: $BD = b\sqrt{۲}$.

حال با توجه به اینکه $\overset{\Delta}{BAD}$ قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین نیست، پس قضیهٔ فیثاغورس در آن صدق می‌کند، یعنی: $b^۲+AD^۲=۲b^۲$.



شکل ۳

در نتیجه: AD=b و این تناقض است. زیرا فرض بر این است که: AD<AC=b. بنابراین a نمی‌تواند بزرگ‌تر از $b\sqrt{۲}$ باشد و به طریق مشابه، a نمی‌تواند کوچک‌تر از $b\sqrt{۲}$ باشد. پس: $a = b\sqrt{۲}$ و حکم برای تمامی مثلث‌ها ثابت می‌شود.